偏光（No.4）

栗田　進

4　屈折率

光が媒質の影響を受けるのは、物質の光学的性質を表す屈折率n（広い意味で、減衰係数も含む）を通してである。これまで屈折率を与えられたものとして光の性質を扱ってきた。また、これ以後も屈折率を与えられたものとして取り扱うつもりである。そこで、話を先に進める前にここで屈折率について少し考察してみたい。

媒質を構成している物質は分子、原子、あるいは更に小さな粒子（原子核と電子）の集まったものであるので、これらの粒子と光との相互作用によって媒質の屈折率は決まる。粒子と光との相互作用は電磁気学で記述されるので、電磁気の基本的な事柄をまず整理し、次いで誘電率と構成物質との関係に言及する。光吸収のない波長領域では屈折率と誘電率εは$n^2 = \varepsilon / \varepsilon_0$の関係がある。それ故、物質の光学的性質は誘電率によって表されるといっても良い。誘電率は強誘電体とよばれる小数の物質を除けば、電場の大きさには寄らない定数である*)。

誘電率は電場の振動数により、また、温度によっても変わる。誘電率は一般にはテンソル量（結晶光学ではこれが重要になる）であるが、方向性を持たない物質（液体、ガラス等）ではスカラー量である。この章ではスカラー量として取り扱う。

4.1　光と物質の相互作用

光が物質に入射すると、物質を構成する原子あるいはイオンは光の電場によって正負の電荷がそれぞれ反対方向の力を受ける。このため電荷に偏りが生じ、原子あるいは正負イオン対は分極を起こす（図１）。図において、電子雲の中心と原子核は同じ位置にあるが、電場がかかると電子雲の中心は電場Eのマイナス方向に、原子核はプラスの方向に僅かにずれる。この分極によって起こる電気双極子モーメント**m**は次のように定義される。

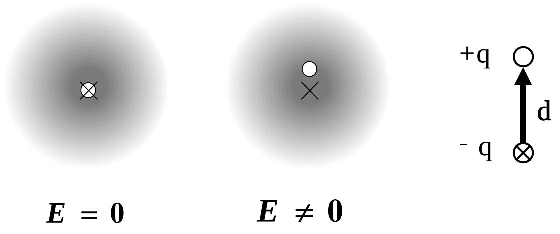

図 4-1　原子は電場がかかると分極する。

---

*）通常の物質でも誘電率は電場に依存する。εをEで展開すると、$\varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}\mathbf{E} + \varepsilon^{(2)}\mathbf{EE} + \cdots\cdots$のように表されるが、電場が小さい普通の光では第１項で充分である。以下では$\varepsilon = \varepsilon^{(0)}$としている。強力なレーザ光のように、強度の大きな光では第２，３項も重要になる。これらの項が現れる現象を扱うのが非線形光学である。

$$\mathbf{m} = q\mathbf{d} \tag{4.1}$$

ここで q は電荷量、$\mathbf{d}$ はマイナス電荷の中心からプラス電荷の中心へ引いたベクトルである。NaCl 等のイオン結晶では各陽イオン、陰イオンが平衡位置からずれることから分極が起こるが、このときは平衡点からのずれの量が d となる。物質はこの様に光の電場の作用に対して電気双極子の集まりとして応答する。以下では物質をこの様な双極子の集合体と見なし、光に対する応答を双極子の応答として考える。

4.2　電気分極と誘電率

単位体積あたりの電気双極子モーメントを $\mathbf{P}$ で表わすと

$$\mathbf{P} = \sum_j N_j \mathbf{m}_j \tag{4.2}$$

N_j は j で区別される j タイプの粒子の単位体積あたりの数、$\mathbf{m}_j$ はその粒子の電気双極子モーメントである。このように定義された P を電気分極、あるいは単に分極と呼ぶ。話を簡単にするために、物質は 1 種類の粒子からなっているとしよう。この場合（2）は

$$\mathbf{P} = N\mathbf{m} \tag{4.3}$$

この分極した状態を次のように考えてみる。粒子の並んだ平面を切り出し、その平面をプラスの電荷を持ったシートとマイナスを持ったシートに分ける。外部からの電場がないとき、両シートは一致しているので至る所中性である。電場がかかるとプラスシートは電場方向に、マイナスシートは反対方向にずれる。このために電場方向のシート端にはプラス電荷が、電場と反対向きの端にはマイナス電荷が生じる。シートが重なっている部分はプラス、マイナスが打ち消しあって中性である。この様なシートが積み重なって立体の物質ができているから、物質表面に発生する電気量は次のようにして計算できる。粒子は 1 種類とし、一様に分布しているとするとプラスの電荷密度は Nq, マイナスの電荷密度は-Nq である。これが電場方向に互いに d だけずれたから、電場に垂直な単位平面あたり Nqd=Nm、すなわち、分極 P の電荷が発生することになる。結論として、「物質に電場がかかると分極 P が発生し、物質の表面には分極 P に垂直な平面に ± P の電荷面密度が発生する。」

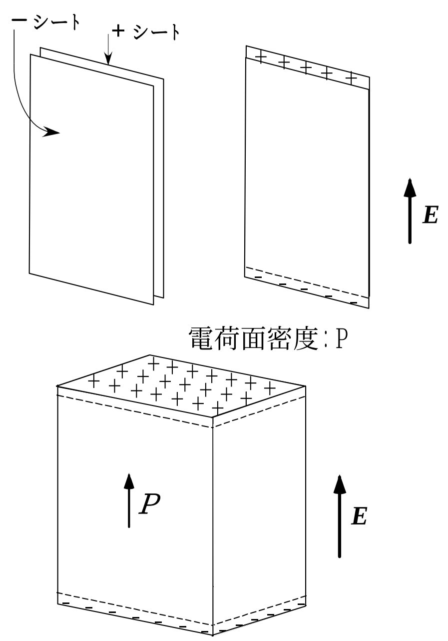

図 4-2　＋シートと－シートが電場によってずれる。三次元では表面に分極 P に相当する表面電荷が発生する。

物質の表面が曲面の場合、曲面に垂直な単位ベクトルをｓとし、ｓと P のなす角をθとすると、その表面に発生する電荷面密度は、

$$\mathbf{s}\cdot\mathbf{P} = P\cos\theta \qquad (4.4)$$

となる。

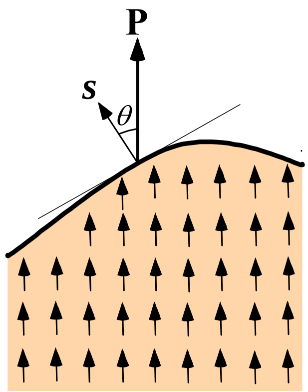

図 4-3　分極Ｐに対して傾いた表面には電荷面密度 $P\cos\theta$ が発生する。

4.3　物質内の電場

物質内の電場 E、電気変位 D、電気分極 P の３つの量の間には次のような関係がある。

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P} \qquad (4.5)$$

Ｅが小さいとき、電気双極子モーメントは電場に比例するので分極Ｐも電場に比例する。それゆえ、

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \qquad (4.6)$$

と書ける。比例定数 ε を誘電率という。ε_0 は真空の誘電率で、その値は

$$\varepsilon_0 = 10^{11}/4\pi c^2 = 8.854\times10^{-12}\ \mathrm{F/m}$$

物質は一様な連続体ではなく、原子からなっている。原子は正の核と負の電子からできているから、これらの核と電子によって生じる電場も加わるから、実際の電場は微視的に見ると場所によって激しく変動している。それ故、原子に働いて分極を起こさせる電場は外からかけた電場であるかどうか定かではない。そこで、D、E、Ｐの間の関係とその意味を平行平板コンデンサーを例に説明し、その後、原子にかかる電場を考察しよう。

図のように電極間に電位差 V をかけると両電極板上には電荷が溜まる。誘電体がない場合は電極板上の電荷密度は $\pm\varepsilon_0 E$ である。$\mathbf{E}$ はコンデンサー内の電場で、

$$l\cdot E = V \qquad (4.7)$$

である。すなわち、電荷ｑをマイナス極からプラス極まで運ぶのに必要な仕事量が電位差（ｑV）である。E の電場中にある電荷ｑに働く力は qE で、電場方向に l だけ動かすとき仕事量は qEl となるので（7）の関係がある。この関係から平行平板電極上の電荷密度が Q のとき、コンデンサー内に発生する電場は $E = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ であることも注意されたい。

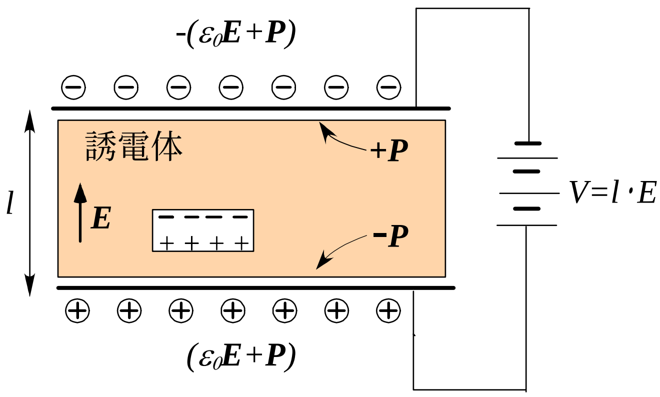

図 4-4 電位差Ｖをかけた平行平板コンデンサー中の誘電体

次いで平板間に誘電体を挿入する。外場がかかっているので誘電体は分極する。この分極の大きさは物質による。その特性が物質の誘電率εで表わされている。Ｐに分極したとすると、上で述べたように誘電体の上下表面に$\pm P$の電荷面密度が発生する。この電荷のためにコンデンサー間の電位が下がるのでそれを保証するために電源から電荷が供給される。その量は誘電体上に発生した電荷量に等しいので、平板上には$\pm(\varepsilon_0 E+P)$の電荷がたまることになる。

誘電体内の巨視的な、すなわち、ある微少な体積内で平均した電場をＥとする(特に断らなかったがこれまでもこの意味で使ってきた)。外部電源によって電極板間の電位差Ｖが与えられているので、$l\cdot E=V$となり、物質中の巨視的電場は真空中のコンデンサー内の電場に等しい。

次に図のように電極板に平行に空間を開けると、中の上部に＋Ｐ，下部に－Ｐの電荷面密度が発生し、この電荷による電場（$\dfrac{P}{\varepsilon_0}$）が加わるので、開けた空間内部の電場は

$$E+\frac{P}{\varepsilon_0}=\frac{D}{\varepsilon_0} \qquad (4.8)$$

となる。この式は、誘電体の上部に発生した電荷－Ｐと切り取った空間の上部に発生した＋Ｐの電荷による電場が相殺されるので、空間の電場は平行電極板の電荷密度±（$\varepsilon_0 E+P$）によってできる電場と考えて良いことを示している。（8）を書き換えて

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}=\varepsilon\mathbf{E} \qquad (4.9)$$

物質中の電荷にはたらく電場は外から与えられるＥであり、光の照射の場合は光の電場がこれにあたる。

4.4　ローレンツ場（局所場）

物質中の電場は巨視的な立場から得た電場で、$E=\dfrac{V}{l}$である。しかし、物質の個々の原子に作用してこれを分極させる電場は必ずしもこのＥと同じではない。なぜなら、既に述べたように、原子を分極させる電場は外部電場ばかりではなく、近くにある同じように分極した原子からの寄与があるからである。原子に作用してこれを分極させる場をローレンツ場、あるいは局所場といい、ここではそれを$\mathbf{E}_{loc}$と書こう。ローレンツ（H.A.Lorentz）に従ってこれを計算する。$\mathbf{E}_{loc}$を次のように分けて考える。

$$\mathbf{E}_{loc}=\mathbf{E}_{ext}+\mathbf{E}_{\mathrm{int}}+\mathbf{E}_1+\mathbf{E}_2 \qquad (4.10)$$

ここで、$\mathbf{E}_{ext}$はコンデンサーの電極にある電荷によって生じる電場（$\dfrac{\mathbf{D}}{\varepsilon_0}$）、$\mathbf{E}_{\mathrm{int}}$は物質の表面に発生した分極電荷$\pm P$による電場（$-\dfrac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0}$）である。この和は(8),(9)で述べたように、

$E=\dfrac{V}{l}$ として得られる電場で

$$\mathbf{E}_{ext}+\mathbf{E}_{\rm int}=\mathbf{E} \qquad (4.11)$$

となる。

$\mathbf{E}_1$ と $\mathbf{E}_2$ は次のような場である。今考えている原子を中心としてかなり多数の原子を含む半径Ｒの球を考える。球の外の原子は連続体と見なせる程度に、球の半径は充分大きく取る。この球を切り取ると、球が抜けた穴には内面に分極による電荷が発生する。そうするとその電荷によって中心原子の位置に電場が発生する。この電場が $\mathbf{E}_1$ である。$\mathbf{E}_2$ は切り取った球の内部の分極原子による電場で、この電場は正確に計算して求める*)。すなわち、

$$\mathbf{E}_2=\sum_i\frac{3(\mathbf{m}_i\cdot\mathbf{r}_i)\,\mathbf{r}_i-r_i^2\,\mathbf{m}_i}{4\pi\varepsilon_0\,r_i^5} \qquad (4.12)$$

ここで添え字の i は i 番目の原子を意味し、Σの後の式は $\mathbf{r}_i$ にある電気双極子 $\mathbf{m}_i$ が原点につくる電場である。和は球内の全ての分極原子について行う。この和は原子の並び方、すなわち結晶構造による。もし、原子が立方対称に配列、あるいはガラスのように均一に分布していればこの和はゼロになる。これを示そう。いずれも原子は立方対称に分布しているから**m**をｚ方向になるように座標軸を取ると、E_{2x}, E_{2y} は xz, yz の項が残り、対称性のためにゼロになる。ｚ方向の電場は、

$$E_{2z}=\sum_i\frac{3m_i z_i^2-m_i r_i^2}{4\pi\varepsilon_0 r_i^5} \qquad (4.13)$$

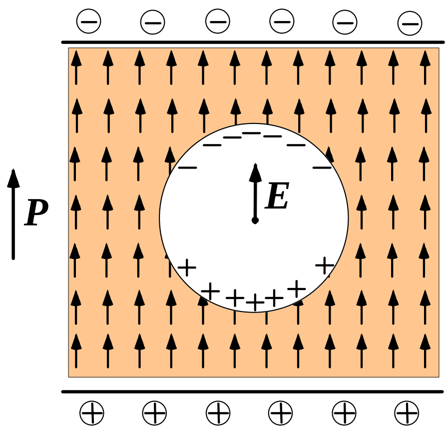

図 4-5 分極した誘電体中の球孔の表面に発生する電荷とそれによって中心に発生する電場

立方対称性から $\sum\left(z_i^2/r_i^5\right)=\sum\left(y_i^2/r_i^5\right)=\sum\left(x_i^2/r_i^5\right)$

であり、$\sum\left(r_i^2/r_i^5\right)=3\sum\left(z_i^2/r_i^5\right)$ となるから、E_{2z} もまたゼロとなり、結局

$$\mathbf{E}_2=0 \qquad (4.14)$$

が得られる。

---

*) 電気双極子モーメント**m**が **r** 離れたところにつくる電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^5}\left(3(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r}-r^2\mathbf{m}\right)$$

である。$\mathbf{E}(\mathbf{r})=\mathbf{E}(-\mathbf{r})$ であるから **r** にある**m**が原点につくる電場も上式で与えられる。電場は距離の３乗に反比例して減少する。この式の導出は電磁気学の教科書に記載されている。例えば「電磁気学」砂川重信著（岩波書店）111 p

球の表面の分極電荷による電場$\mathbf{E}_1$は以下のようにして計算できる（図６参照）。図のように分極と平行方向にｚ軸を取り、θをｚ軸から測った角とすると、表面電荷密度は、(4)より、$-P\cos\theta$である。この電荷によって原点に生ずる電場のｚ成分を考えると、

$$\int \frac{(P\cos\theta)(2\pi R\sin\theta)(Rd\theta)\cdot\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{P}{3\varepsilon_0} \tag{4.15}$$

となる。コンデンサー内の電場Ｅと同じ向きであるので、結局、

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0} \tag{4.16}$$

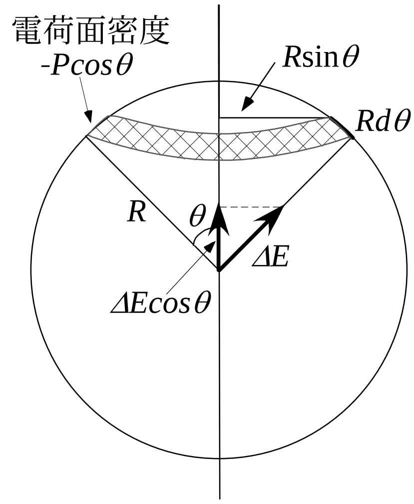

図 4-6 表面電荷による球中心における電場

が得られる。これが原子に作用する電場で、これをローレンツの電場という。

4.5 屈折率と原子分極

原子に生じる電気双極子モーメントは電場に比例するので、その比例定数をαとすると、

$$\mathbf{m} = \alpha\mathbf{E}_{loc} \qquad \alpha：原子分極率 \tag{4.17}$$

(3)、(16)より、

$$\mathbf{P} = N\mathbf{m} = N\alpha(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{3\varepsilon_0}) \tag{4.18}$$

これよりＰを求めると、

$$\mathbf{P} = \frac{N\alpha}{(1 - N\alpha/3\varepsilon_0)}\mathbf{E} \tag{4.19}$$

また、（5）、（6）より、$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\mathbf{E}$であるから、両式を等しくおいて、$\mathbf{E}$を消去すると、

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \tag{4.20}$$

または、$\varepsilon = n^2\varepsilon_0$の関係があるから、

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0} \tag{4.21}$$

物質を構成する分子あるいは原子の分極と屈折率との関係が得られた。この式をLorentz-Lorenz の公式という。この式によれば、屈折率は原子分極率に結びついていることが分かる。なお、(16)はコンデンサーを思考物体として定常電場について導いたもので、この公式が光のような振動電場についても成り立つかどうか定かではない。しかし、原子の大きさに比べて波長が充分大きく、考えている原子のまわりでは一様な外場がかかって

いると考えられ、しかも電場の伝搬による遅れが無視できる程度に小さい場合は、この公式は適用できる。可視光領域では波長が原子の大きさに比べて充分大きいのでこの公式が使えると考えられる。

物体が幾種類かの原子あるいは分子で構成されているときには、(2)より $N\alpha$ を次のように置き換えればよい。

$$N\alpha \Rightarrow \sum_i N_i \alpha_i \tag{4.22}$$

(21)は

$$\frac{n^2-1}{n^2+2} = \frac{1}{3\varepsilon_0}\sum N_j \alpha_j = \frac{N}{N_a} A \tag{4.23}$$

ただし、$N = \sum N_j$ 、$A = \dfrac{\sum N_j A_j}{N}$、$A_j = \dfrac{1}{3\varepsilon_0} N_a \alpha_j$　N_a ＝モル分子数、とおいた。

A_j を原子屈折(molar refractivity)といい、1 モルあたりの原子屈折率に相当している。(23)式は物質の屈折率が物質を構成する原子、あるいは分子（イオン）の原子屈折の和で決まることを示している。個々の原子屈折が求められており、それらの化合物としての物質にもこの加法則が良く成り立つことが知られている*)。しかし、化合物についてもこの加法則が成り立つことは少し奇妙な気がする。なぜなら、化合物は原子がその価電子を相手の原子に移動したり、あるいは共有したりして成り立っているはずである。一方、原子屈折率を主に決めているのは広がりの大きい価電子である。それ故、化合物をつくれば、原子屈折の値も違ったものになるはずだからである。加法則が成り立つのは、多分、原子屈折といっても、この値が化合物について測定されたものから一次関係を仮定して求められているかだと思われる。この場合は化合物の相手が変わっても原子屈折の値は余り変化しないからである。

次回は屈折率の異方性および分散について述べる。

---

*) 原子屈折の値は次の書籍に載っている。岩波講座「現代物理学」（光学測定法）：石黒・桑原著(1954)　24p、「光学の原理Ｉ」ボルン・ウォルフ著、草川・横田訳（東海大学出版 1974）126p